

9 КЛАСС

1. В одной из клеток бесконечной клетчатой бумаги находится робот, которому могут быть отданы следующие команды:

- **вверх** (робот перемещается на соседнюю клетку сверху);
- **вниз** (робот перемещается на соседнюю клетку снизу);
- **влево** (робот перемещается на соседнюю клетку слева);
- **вправо** (робот перемещается на соседнюю клетку справа).

Если, например, робот выполнит последовательность из четырех команд (**вверх, вправо, вниз, влево**), то он, очевидно, вернется в исходное положение, т.е. окажется в той же клетке, из которой начал движение. Сколько существует всего различных последовательностей из 4 команд, возвращающих робота в исходное положение?

Решение. Для краткости команду **влево** будем обозначать **Л**, **вправо** – **П**, **вверх** – **В**, **вниз** – **Н**. Чтобы робот вернулся в исходное положение необходимо и достаточно, чтобы ему было отдано команд **Л** столько же, сколько и команд **П**, а команд **В** – столько же, сколько и **Н**. Пусть k – количество команд **Л** в последовательности. Подсчитаем количество N_k искомых последовательностей для k от 0 до 2.

- $k = 0$. Последовательность состоит только из команд **В** и **Н**. Так как их поровну, то на 2 местах из 4 должна быть команда **В**, а на оставшихся двух – **Н**. Выбрать 2 места из 4 можно C_4^2 способами. Следовательно, $N_0 = C_4^2 = 6$;

- $k = 1$. Каждая из команд **Л**, **П**, **В**, **Н** встречается в последовательности ровно 1 раз. Число перестановок из 4 элементов равно $4!$. Поэтому $N_1 = 4! = 24$;

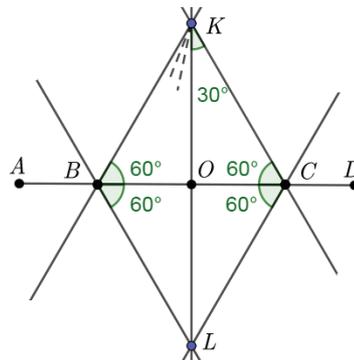
- $k = 2$. Здесь две **Л**, две **П** и нет команд **В** и **Н**. Две команды **Л** можно разместить C_4^2 способами. Значит $N_2 = C_4^2 = 6$.

Таким образом, искомое число последовательностей равно $N_0 + N_1 + N_2 = 36$.

Ответ: 36.

2. Имеются карандаш, линейка, а также некоторое *специальное устройство*, которое для любого изображенного на плоскости угла строит два луча, делящие этот угол на три равных угла. С помощью этих инструментов постройте на плоскости угол величиной 10° . (Напомним, что карандашом можно отметить точку плоскости, в частности, точку пересечения двух прямых. Линейка лишь позволяет провести прямую через две отмеченные точки, и никаких «параллельных или перпендикулярных краев» у неё нет.)

Решение. На прямой, проведенной через две различные точки A и D , отметим точки B и C как на рисунке. Разделим развернутые углы ABC и DCB (которые следует представлять себе отложенными сначала в верхнюю, а затем и в нижнюю полуплоскость относительно прямой AD) на три равные части. Получим в результате прямые, образующие угол 60° с прямой AD и пересекающиеся в точках K и L . Пусть O – точка пересечения AD и KL . Угол BKO равен, очевидно, 30° . Разделив его на три части, получим требуемый угол.



Построение выполнено.

3. Действительные числа x, y, z удовлетворяют соотношениям:

$$4x^2 - 2x - 30yz = 25y^2 + 5y + 12xz = 9z^2 - 3z - 20xy.$$

Найдите все возможные тройки чисел (a, b, c) , где $a = 2x + 5y, b = 3z + 5y, c = 3z - 2x$.

Решение. Заметим, что

$$a - b + c = 0. \tag{1}$$

Обозначим $A = 4x^2 - 2x - 30yz$, $B = 25y^2 + 5y + 12xz$ и $C = 9z^2 - 3z - 20xy$. Вычитая друг из друга эти равенства, получим:

$$\begin{aligned} A - B &= a \cdot (2x - 6z - 5y - 1) = 0, \\ B - C &= b \cdot (5y + 4x - 3z + 1) = 0, \\ A - C &= c \cdot (1 - 2x - 10y - 3z) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Предположим, что все три числа a, b, c отличны от нуля. Тогда $2x - 6z - 5y - 1 = 0$, $5y + 4x - 3z + 1 = 0$ и $1 - 2x - 10y - 3z = 0$, что невозможно, так как, сложив 2-е равенство с 3-им и вычтя 1-е, получим $3 = 0$. Значит, хотя бы одно из чисел a, b, c равно нулю. Рассмотрим возможные случаи:

1) Все три числа a, b, c равны нулю. Тройка $a = b = c = 0$ очевидно удовлетворяет условиям задачи (достаточно взять $x = y = z = 0$).

2) Среди чисел a, b, c только два равны нулю. Это невозможно: если два числа равны нулю, то, согласно (1), равно нулю и третье.

3) Только одно из чисел a, b, c равно нулю.

- $a = 0$. Тогда $x = -\frac{5y}{2}$. Из системы (2) находим $b = c = 1$;
- $b = 0$. Тогда $a = -c = 1$;
- $c = 0$. Тогда $a = b = -1$.

Ответ: $(0,0,0), (0,1,1), (1,0,-1), (-1,-1,0)$.

4. Найдите все такие функции $f(x)$, которые одновременно удовлетворяют трем условиям: 1) $f(x) > 0$ для любого $x > 0$; 2) $f(1) = 1$; 3) $f(a+b) \cdot (f(a) + f(b)) = 2f(a) \cdot f(b) + a^2 + b^2$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$.

Решение. В тождестве из условия задачи

$$f(a+b) \cdot (f(a) + f(b)) = 2f(a) \cdot f(b) + a^2 + b^2 \tag{1}$$

положим $a = 1, b = 0$. Тогда $f(1) \cdot (f(1) + f(0)) = 2f(1) \cdot f(0) + 1$. Поскольку $f(1) = 1$, находим $f(0) = 0$.

Положив затем $b = -a$ в (1), получим, с учетом (2), что

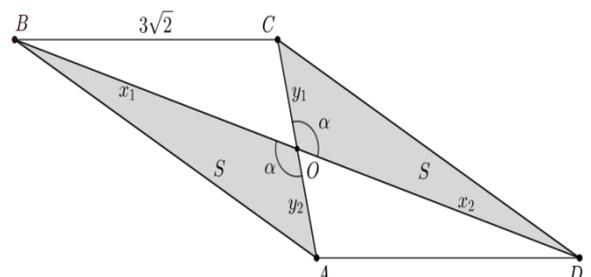
$$f(a) \cdot f(-a) = -a^2. \tag{3}$$

Наконец, при $b = 0$ тождество (1) (с учетом (2)) примет вид $f(a) \cdot f(a) = a^2$. Значит необходимо, чтобы $f(a) = a$ при $a > 0$, так как по условию $f(x) > 0$ для $x > 0$. Далее, согласно (3), $f(a) = a$ и при $a < 0$. Окончательно, $f(x) = x$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Легко убедиться, что такая $f(x)$ действительно удовлетворяет требованиям 1), 2), 3) из условия задачи.

Ответ: $f(x) = x$.

5. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Известно, что $S_{ABO} = S_{CDO} = \frac{3}{2}$, $BC = 3\sqrt{2}$, $\cos \angle ADC = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Найдите синус угла между диагоналями этого четырехугольника, если его площадь принимает наименьшее возможное значение при данных условиях.

Решение. Докажем, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм. Пусть x_1, x_2, y_1, y_2 – отрезки, на которые диагонали делятся их точкой пересечения. Обозначим угол между диагоналями через α . По условию площади треугольников ABO и CDO равны, то есть $\frac{1}{2}x_1y_2 \sin \alpha = \frac{1}{2}x_2y_1 \sin \alpha$. Отсюда $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$, и, следовательно, треугольники BOC и AOD подобны по первому признаку подобия: две стороны (x_1 и y_1) треугольника BOC пропорциональны двум сторонам (x_2 и y_2) треугольника AOD , а углы, образованные этими сторонами ($\angle BOC$ и $\angle AOD$), равны. Пусть $k = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ – коэффициент подобия треугольников BOC и AOD .



Обозначим через S площади треугольников ABO и CDO (по условию $S = \frac{3}{2}$). Тогда $S_{BOC} = k \cdot S$ и $S_{AOD} = S/k$. В итоге, площадь четырехугольника $ABCD$ может быть представлена в виде:

$$S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{CDO} + S_{BOC} + S_{ABO} = 2S + S \left(k + \frac{1}{k} \right).$$

Известно, что для $k > 0$ минимальное значение выражения $k + \frac{1}{k}$ достигается при $k = 1$. Значит, $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$, то есть диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, поэтому $ABCD$ – параллелограмм. Его площадь $S_{ABCD} = 4S = 6$.

Для нахождения синуса угла между диагоналями воспользуемся тем, что площадь четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2S_{ABCD}}{AC \cdot BD}. \quad (1)$$

Чтобы найти длины диагоналей, вычислим сторону CD , записав формулу для площади параллелограмма

$$S_{ABCD} = 4S = AD \cdot CD \cdot \sin \angle ADC \Rightarrow CD = \frac{4S}{AD \cdot \sin \angle ADC} = \frac{4 \cdot \frac{3}{2}}{3\sqrt{2} \sqrt{1 - \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2}} = 2\sqrt{5}.$$

Теперь найдем диагонали AC и BD по теореме косинусов из треугольников ADC и BCD

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos \angle ADC} = \sqrt{2},$$

$$BD = \sqrt{AD^2 + CD^2 + 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos \angle ADC} = \sqrt{74}.$$

Подставив найденные значения в соотношение (1), получим $\sin \alpha = \frac{6}{\sqrt{37}}$.

Ответ: $\frac{6}{\sqrt{37}}$.

6. Найдите все простые числа, десятичная запись которых имеет вид $101010 \dots 01$.

Решение. Пусть $2n + 1$ – количество цифр в исследуемом числе $A = 101010 \dots 101$. Пусть $q = 10$ – основание системы счисления. Тогда $A = q^0 + q^2 + \dots + q^{2n} = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1}$. Рассмотрим случаи четного и нечетного n .

- $n = 2k \Rightarrow A = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1} = \frac{q^{2k+1}-1}{q-1} \cdot \frac{q^{2k+1}+1}{q+1}$. Таким образом, число A представлено в виде произведения двух целых сомножителей (по теореме Безу многочлен $q^{2k+1} \pm 1$ делится без остатка на многочлен $q \pm 1$), каждый из которых отличен от 1. Значит, при четных n число A простым не является.

- $n = 2k - 1 \Rightarrow A = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1} = \frac{q^{2k-1}-1}{q^2-1} \cdot (q^{2k} + 1)$. При $k > 1$ оба сомножителя целые и отличны от 1; значит, число A составное. Остается убедиться, что при $k = 1$ получается простое число $A = q^0 + q^2 = 101$.

Ответ: 101.

7. Обыкновенная дробь $\frac{1}{221}$ представлена в виде периодической десятичной дроби. Найдите длину периода. (Например, длина периода дроби $\frac{25687}{99900} = 0,25712712712 \dots = 0,25(712)$ равна 3.)

Решение. Рассмотрим пример. Переведем обыкновенную дробь $\frac{34}{275}$ в десятичную. Для этого выполним деление уголком (рис.). В результате найдем $\frac{34}{275} = 0,123636363 \dots = 0,123(63)$. Получена непериодическая часть 123 и период 63. Обсудим, почему непериодическая часть здесь возникла, и покажем, что у дроби $\frac{1}{221}$ ее нет. Дело в том, что в десятичной записи дроби $\frac{34}{275}$ цифра 3 появляется всякий раз, когда при очередном делении на 275 получается остаток 100. Мы видим (и это ключевой момент!), что здесь один и тот же остаток 100 дают различные числа: 650 и 1750. Откуда, в свою очередь, взялись эти 650 и 1750? Число 650 получилось дописыванием нуля к числу $r_1 = 65$ (остатку

от деления на 275 числа 340). То есть $10r_1 = 650$. Аналогично, $10r_2 = 1750$, где $r_2 = 175$. Числа 650 и 1750 дают одинаковые остатки при делении на 275 из-за того, что их разность на 275 делится нацело: $1750 - 650 = 10(r_2 - r_1) : 275$. Такое возможно только потому, что числа 10 и 275 не взаимно просты. Теперь понятно, почему у дроби $\frac{1}{221}$ непериодической части не будет: если r_1 и r_2 – это различные остатки от деления на 221, то произведение $10(r_2 - r_1)$ на 221 нацело не делится (число 221, в отличие от 275, взаимно просто с 10 – основанием системы счисления, поэтому непериодической части нет).

$$\begin{array}{r}
 -34 \quad | \quad 275 \\
 \hline
 275 \quad | \quad 0,12363... \\
 \hline
 -650 \\
 \hline
 550 \\
 \hline
 \underline{1000}0 \\
 \hline
 825 \\
 \hline
 -1750 \\
 \hline
 1650 \\
 \hline
 \underline{1000}0 \\
 \hline
 825 \\
 \hline
 -1750 \\
 \hline
 \dots
 \end{array}$$

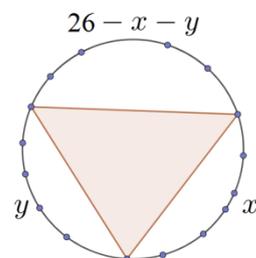
Итак, десятичная запись дроби $\frac{1}{221}$ имеет вид $\frac{1}{221} = 0, (a_1 a_2 \dots a_n)$. Найдем n . Обозначим $A = a_1 a_2 \dots a_n$. Тогда $\frac{1}{221} = 10^{-n} \cdot A + 10^{-2n} \cdot A + \dots$. По формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{221} = \frac{A}{10^n - 1}$. Отсюда $A = \frac{10^n - 1}{221}$. Поскольку A – натуральное число, требуется найти (наименьшее) натуральное n , при котором число 10^n дает остаток 1 при делении на 221.

Заметим, что $221 = 13 \cdot 17$. Вообще, целое число B (у нас $B = 10^n$) при делении на 221 дает остаток 1 в том и только том случае, когда B при делении и на 13, и на 17 также дает остаток 1. Необходимость очевидна. Достаточность: если $B = 13k_1 + 1$ и $B = 17k_2 + 1$, то $13k_1 = 17k_2$, а значит число k_1 делится на 17, то есть $k_1 = 17m$. Поэтому $B = 13 \cdot 17m + 1$, и при делении на 221 действительно получается остаток 1. Найдем теперь такие n , что число 10^n дает остаток 1 при делении на 13. Рассмотрим последовательность $b_n = 10^n$. Заменим ее члены остатками от деления на 13. Получится вот что: $b_1 = 10, b_2 = 9, b_3 = 3, b_4 = 4, b_5 = 1, \dots$ Каждый последующий член однозначно определяется предыдущим. Значит, $\{b_n\}$ – периодическая последовательность, в которой каждый шестой член равен 1. То же сделаем для 17. Там единице будет равен каждый 16-й член. Таким образом, остаток 1 при делении и на 13, и на 17 получится при $n = \text{НОК}(6, 16) = 48$.

Ответ: 48.

8. Аня с Борей играют в «морской бой» по следующим правилам: на окружности выбираются 29 различных точек, пронумерованных по часовой стрелке натуральными числами от 1 до 29. Аня рисует корабль – произвольный треугольник с вершинами в этих точках. Будем называть «выстрелом» выбор двух различных натуральных чисел k и m от 1 до 29. Если отрезок с концами в точках с номерами k и m имеет с треугольником Ани хотя бы одну общую точку, то корабль считается «раненым». Боря производит «залп» – несколько выстрелов одновременно. Аня нарисовала корабль и показала его Боре. И тут они заметили, что любой «залп» из K различных выстрелов *обязательно* ранит корабль Ани. Укажите какое-нибудь расположение корабля Ани, при котором значение K будет минимальным.

Решение. Вершины треугольника Ани делят окружность на три дуги (рис.). Пусть x, y и $26 - x - y$ – количество точек на этих дугах (рис.), не считая вершины самого треугольника. Чтобы «выстрел» с концами в точках k и m не задел корабль, надо чтобы обе эти точки лежали на одной из дуг. Выбрать две различные точки на дуге, содержащей x точек, можно, очевидно, C_x^2 способами. То же и для остальных дуг. Значит число N «безопасных» выстрелов равно сумме $N = C_x^2 + C_y^2 + C_{26-x-y}^2$. Тогда следующий выстрел уже обязательно «ранит» корабль, поэтому $K = N + 1$.



Итак, требуется найти такие целые неотрицательные числа x, y , удовлетворяющие условию $x + y \leq 26$, при которых значение N минимально. Запишем выражение для N в развернутом виде:

$$N = \frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} + \frac{(26-x-y)(25-x-y)}{2}.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим

$$N = x^2 - x(26 - y) + y^2 - 26y + 325. \tag{1}$$

**Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций
по математике**

При каждом фиксированном y от 0 до 26 будем искать такое значение x , удовлетворяющее неравенству

$$0 \leq x \leq 26 - y, \quad (2)$$

при котором значение N минимально. Если y фиксирован, то правая часть (1) принимает минимальное значение при

$$x = \frac{26-y}{2} \quad (3)$$

(вершина параболы, принадлежащая промежутку (2)). Это минимальное значение равно $\frac{3}{4}y^2 - 13y + 156$. Оно, в свою очередь, минимально при $y = \frac{26}{3} \approx 8,6$. Из (3) тогда находим $x = \frac{26}{3}$. Среди точек с целыми координатами (8,8), (8,9), (9,8), (9,9) – ближайших целочисленных соседей точки минимума $(\frac{26}{3}, \frac{26}{3})$ – выбираем ту, которой соответствует наименьшее значение N . Это точки (8,9), (9,8), (9,9). Для них $N = 100$.

Ответ: Корабль следует расположить так, чтобы на трех дугах, на которые вершины корабля разбивают окружность, располагалось по 8, 9 и 9 точек (не считая вершины самого корабля).