Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений по математике в 2014/2015 году

Вариант 1

1. Школьник вычислил произведение всех натуральных чисел от 1 до 52 включительно и записал в тетрадь ответ:

806581751709438785716606368564037669752895054408832778x4000000000000.

Но одну цифру (она отмечена символом x) он написал неразборчиво. Найдите эту цифру. Ответ обоснуйте.

Решение: В разложении числа 52! на простые множители,

$$52! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot \ldots, \qquad (1)$$

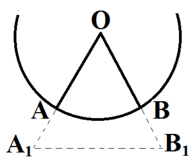
степень пятерки $c = 12$. Действительно, множитель 5 дают числа 5,10,15,20, 25..., причем разложения чисел 25 и 50 содержат 5 во второй степени. Степень же двойки a, очевидно, существенно больше 12. Рассмотрим произведение простых сомножителей в правой части (1). Каждый ноль на конце десятичной записи числа 52! – результат перемножения одной 2 и одной 5. Именно поэтому нулей на конце тоже 12. Двоек у нас существенно больше, чем пятерок, поэтому, если в записи числа 52! отбросить все нули на конце, то получившееся в результате число

$$806581751709438785716606368564037669752895054408832778x4 \qquad (2)$$

будет делиться на 2 в достаточно высокой степени. В частности, число (2) делится на 2^4=16, а это значит, что на 16 делится число, образованное его четырьмя последними цифрами. Прямым перебором находим, что число 78x4 делится на 16 только при x=2.

Ответ: 2.

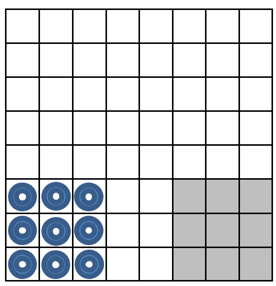
2. Дан круговой сектор AOB. Угол AOB равен 60^0. Длины радиусов OA и OB увеличили на 5%, в результате они превратились в отрезки OA_1 и OB_1. Что больше: длина отрезка A_1B_1 или длина дуги AB? Ответ обоснуйте. (Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.)



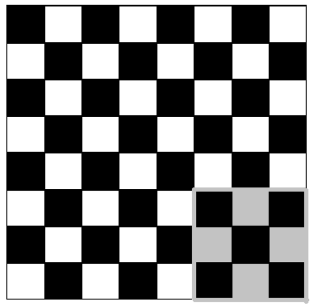
Решение: Длина дуги AB в шесть раз меньше длины окружности и равна $\pi R/3$. Длина основания A_1B_1 равна $2OA_1 \sin\frac{\angle AOB}{2} = 2R \cdot 1,05 \sin 30^0 = 1,05R$. Остается заметить, что $\pi/3 < 1,05$.

Ответ: длина отрезка больше длины дуги.

3. На доске 8x8 клеток расположены 9 шашек. Перемещения шашек (ходы) осуществляются следующим образом: выбирается первая (перемещаемая) и вторая шашки. Затем первую ставят на такую клетку, что исходное и полученное положения симметричны относительно второй шашки. Можно ли такими ходами переместить шашки из исходного положения в правый нижний угол? Ответ обоснуйте.



Решение: Раскрасим клетки в белый и черный цвет. В результате хода перемещаемая шашка из белой клетки попадает вновь в белую, а из черной в черную. Значит, количество белых клеток, занимаемых шашками, всегда одно и то же. Остается заметить, что в правом нижнем углу шашки бы занимали 4 белые клетки, а в исходном положении они занимают 5 белых клеток. Поэтому переместить шашки из исходного положения в правый нижний угол невозможно.



Ответ: нельзя.

4. Докажите, что для каждого натурального числа n выполняется равенство $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+3}\right]$. Здесь скобки [ ] обозначают целую часть числа. (Напомним, что целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, [3,7]=3.)

Решение: Целые части чисел a и b равны в том и только том случае, когда полуинтервал $(a,b]$ не содержит целые числа. Предположим противное: пусть при некотором натуральном n имеет место неравенство $\left[\sqrt{4n+1}\right]\neq\left[\sqrt{4n+3}\right]$. Тогда $\exists m \in N : \sqrt{4n+1} < m \le \sqrt{4n+3} \Leftrightarrow 4n+1 < m^2 \le 4n+3$. Следовательно, m^2 равен либо $4n+2$, либо $4n+3$. Но квадрат целого числа при делении на 4 не может дать остаток 2 или 3. Полученное противоречие доказывает требуемое равенство.

5. Уравнения $x^4+2x^3-x^2-2x-3=0$ и $x^4+3x^3+x^2-4x-6=0$ имеют два общих корня. Найдите их.

Решение: Поделим многочлен $P(x)=x^4+2x^3-x^2-2x-3$ на многочлен $Q(x)=x^4+3x^3+x^2-4x-6$ с остатком: $P(x)=F(x)Q(x)+R(x)$. Общие корни многочленов $P(x),Q(x)$ являются, очевидно, и корнями остатка $R(x)=-x^3-2x^2+2x+3$. Поделив теперь $Q(x)$ на $R(x)$, получим в остатке x^2+x-3. Корни последнего многочлена и будут искомыми.

Ответ: $\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

6. Пусть $f(x)=x^3-x+1$. Докажите, что для всех натуральных чисел m, больших единицы, числа $m, f(m), f(f(m))$ попарно взаимно просты. (Натуральные числа a,b,c называют *попарно взаимно простыми*, если каждое из них больше 1, и никакие два из них не имеют отличных от 1 общих делителей. Например, числа 7,8,15 попарно взаимно просты, а числа 5,8,15 – нет.)

Решение: Заметим, что $m^3>m$ при $m>1$, и, следовательно, числа $f(m)$ и $f(f(m))$ отличны от 1. Докажем, что числа m и $f(m)$ взаимно просты. Предположим противное: у них есть общий делитель $d\neq 1$. Рассмотрим равенство $f(m)=m^3-m+1$. В правой части на d делятся все слагаемые кроме свободного члена, следовательно правая часть на d не делится. Но левая часть делится на d по предположению. Пришли к противоречию. Аналогично доказывается, что и числа $f(m)$ и $f(f(m))$ взаимно просты. Чтобы доказать, что взаимно просты числа m и $f(f(m))$, достаточно заметить, что $f(f(m))$ представляет собой многочлен от m со свободным членом, равным единице: $f(f(m)) = m^9 + \ldots + 1$. Далее остается провести те же рассуждения, что и при доказательстве взаимной простоты чисел m и $f(m)$.

7. Докажите неравенство $a(a-1)^2 + b(b-1)^2 + c(c-1)^2 \le \frac{4}{9}$, если известно, что a, b, c – неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $a + b + c = 1$.

Решение: Равенство $a+b+c=1$ перепишем в виде $a-1/3+b-1/3+c-1/3=0$. Замена $A=-a+1/3, B=-b+1/3, C=-c+1/3$. И, поскольку числа a,b,c не превосходят 1, имеют место неравенства

$$A, B, C \ge -2/3. \qquad (1)$$

В новых переменных $a(a-1)^2 + b(b-1)^2 + c(c-1)^2 = -A^3 - A^2 - B^3 - B^2 - C^3 - C^2 + 4/9$, и доказываемое неравенство принимает вид $A^2 + A^3 + B^2 + B^3 + C^2 + C^3 \ge 0$ или $A^2(1+A) + B^2(1+B) + C^2(1+C) \ge 0$. Это неравенство, очевидно, выполнено в силу (1).

Отметим, что возможно решение, использующее производную: несложно показать, что $\max\limits_{0 \le x \le 1}\left(x(x-1)^2\right) = 4/27$, *максимум достигается при* $x = 1/3$.

8. В классе 10 учеников. Из них требуется сформировать две команды (одну для уборки актового зала, вторую – для работы на пришкольном участке). При этом: 1) количество людей в командах может быть различным (но отличным от нуля), 2) каждый ученик может быть членом только одной команды или не входить в эти команды вовсе. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: Каждого человека мы должны вписать в один из трех списков: 1) "команда 1", 2) "команда 2", 3) "люди, не вошедшие ни в одну из команд". Распределить 10 человек по этим спискам можно 3^{10} способами. Это и был бы ответ в задаче, если бы не требование, что списки 1 и 2 не пусты. Значит из общего числа 3^{10} надо вычесть те распределения учеников, когда список 1 или 2 (или они оба) пуст. Распределить учеников так, чтоб список 1 был пуст можно 2^{10} способами (у каждого ученика две возможности: отправиться в список 2 или 3). Аналогично, количество распределений учеников, при которых будет пустым список 2, также равно 2^{10}. Значит, из 3^{10} надо вычесть $2 \cdot 2^{10}$, но при этом вариант, когда все ученики находятся в списке 3, мы учли 2 раза. Поэтому, окончательный ответ: $3^{10} - 2 \cdot 2^{10} + 1$ способ.

Ответ: $3^{10} - 2 \cdot 2^{10} + 1$.