Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций по математике

9 класс

1. На какое самое большое натуральное число будет гарантированно делиться произведение любых пяти подряд идущих натуральных чисел?

Решение. Из пяти подряд идущих натуральных чисел как минимум два числа делятся на 2, при этом хотя бы одно из них делится на 4. Как минимум одно делится на 3 и ещё одно – на 5. Следовательно произведение делится на 8, 3 и 5. А значит, на 120. Больше быть не может, так как $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Ответ: 120.

2. В восьмеричной системе счисления запись натурального числа состоит только из единиц. Какие остатки от деления на 9 в десятичной системе счисления может иметь это число? Ответ обоснуйте.

Решение. В восьмеричной системе счисления число из условия задачи имеет вид $A = 1 + 8 + 8^2 + \cdots + 8^n$. $8^{2k-1} \equiv (-1)(mod\, 9)$, $8^{2k} \equiv 1(mod\, 9)$.

Следовательно, при чётном n остаток от деления числа A на n равен 1, при нечётном равен.0.

Ответ: 0 или 1.

3. На боковой стороне AB трапеции $ABCD$, с основаниями $BC = 3$ и $AD = 7$, отмечены 11 точек $K_1, K_2, \ldots, K_{11}$, разбивающие сторону AB на 12 равных отрезков, то есть $AK_1 = K_1K_2 = \cdots = K_{10}K_{11} = K_{11}B$. Затем через точки $K_1, K_2, \ldots, K_{11}$ провели прямые, параллельные основаниям трапеции. Эти прямые пересекли сторону CD соответственно в точках $T_1, T_2, \ldots, T_{11}$. Найдите сумму длин получившихся одиннадцати отрезков $K_1T_1, \ldots, K_{11}T_{11}$.

Решение. Обозначим длины отрезков из условия задачи последовательно от меньшего основания к большему $s_1, s_2, \ldots, s_{11}$. Тогда, по свойству средней линии трапеции, очевидно, что $\frac{s_1+s_{11}}{2} = \frac{s_2+s_{10}}{2} = \cdots = \frac{s_5+s_7}{2} = s_6 = 5$. Следовательно, $s_1 + s_2 + \cdots + s_{11} = 55$.

Ответ: 55.

4. Пусть $A = 1111$. Найдите остаток от деления числа $(A+1)^{2024} + (A-1)^{2024}$ на число 1234321.

Решение. Найдём A^2: $(1111)^2 = 1234321$. Заметим, что выражение $(A+1)^{2024} + (A-1)^{2024}$ будет содержать только чётные степени числа A и свободный член равен 2. Тогда по свойствам остатков, остаток от деления числа $(A+1)^{2024}+(A-1)^{2024}$ на число 1234321 равен 2.

Ответ: 2.

5. Известно, что система уравнений $\begin{cases} 9x^2+6xy+3y^2-2x-y=2 \\ 3x^2+6xy-x+y=-1/2 \end{cases}$ имеет ровно четыре решения $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$.

Найдите сумму $x_1+y_1+x_2+y_2+x_3+y_3+x_4+y_4$.

Решение. Данная система линейна относительно x и x^2. Находим

$$x=\frac{6y^2-8y-7}{2(12y-1)}, \qquad x^2=-\frac{6y^3-5y^2-4y+1}{12y-1}.$$

Возведя первое уравнение в квадрат, получим уравнение 4-й степени для определения y:

$$324y^4-360y^3-192y^2+176y+45=0.$$

Корнями этого уравнения являются числа y_1, y_2, y_3, y_4. По теореме Виета их сумма равна $y_1+y_2+y_3+y_4=\frac{360}{324}=\frac{10}{9}$.

Аналогично, разрешив исходную систему относительно y и y^2, получим

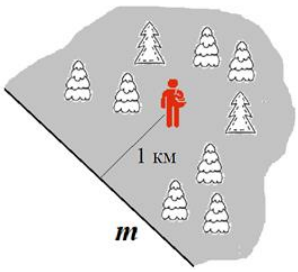
$$324x^4+72x^3-120x^2-40x-1=0.$$

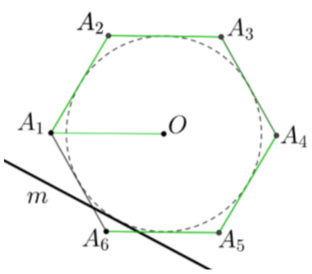
Отсюда $x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{72}{324}=-\frac{2}{9}$.

Таким образом, искомая сумма равна $\frac{10}{9}-\frac{2}{9}=\frac{8}{9}$.

Ответ: $\frac{8}{9}$.

6. Путник заблудился в лесу, который покрывает полуплоскость, ограниченную прямой m. Он знает, что от границы леса (прямой m) он находится на расстоянии 1 км, но не знает в каком направлении граница находится. Как путнику гарантированно выйти из леса, пройдя при этом не более $4\sqrt{3}$ км? Лес очень густой, и увидеть сквозь деревья опушку невозможно (как бы близко от нее он ни находился). Поэтому считается, что путник из леса вышел, если оказался на его границе.





Решение. Проведем окружность радиуса 1 с центром в точке O, где сейчас находится путник. Эта окружность, касается прямой m. Опишем вокруг окружности правильный шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Очевидно, что хотя бы одна его вершина окажется или на границе леса, или за его пределами (в нашем случае это A_6). Значит, побывав во всех вершинах шестиугольника, путник гарантированно из леса выйдет. Для этого надо из точки O сначала пройти в какую-либо вершину шестиугольника (например, в A_1), а затем идти вдоль ***пяти*** его сторон. Длина этого пути равна $OA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5 + A_5A_6 = \frac{2}{\sqrt{3}} + 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$.