

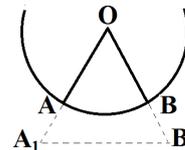
Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных учреждений по математике в 2014/2015 году

Вариант 1

1. Школьник вычислил произведение всех натуральных чисел от 1 до 52 включительно и записал в тетрадь ответ:

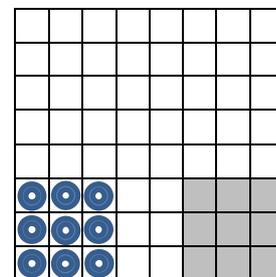
806581751709438785716606368564037669752895054408832778x4000000000000.

Но одну цифру (она отмечена символом x) он написал неразборчиво. Найдите эту цифру. Ответ обоснуйте.



2. Дан круговой сектор AOB . Угол AOB равен 60° . Длины радиусов OA и OB увеличили на 5%, в результате они превратились в отрезки OA_1 и OB_1 . Что больше: длина отрезка A_1B_1 или длина дуги AB ? Ответ обоснуйте. (Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.)

3. На доске 8×8 клеток расположены 9 шашек. Перемещения шашек (ходы) осуществляются следующим образом: выбирается первая (перемещаемая) и вторая шашки. Затем первую ставят на такую клетку, что исходное и полученное положения симметричны относительно второй шашки. Можно ли такими ходами переместить шашки из исходного положения в правый нижний угол? Ответ обоснуйте.



4. Докажите, что для каждого натурального числа n выполняется равенство $\lceil \sqrt{4n+1} \rceil = \lceil \sqrt{4n+3} \rceil$. Здесь скобки $\lceil \cdot \rceil$ обозначают целую часть числа. (Напомним, что целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x . Например, $\lceil 3,7 \rceil = 3$.)
5. Уравнения $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 3 = 0$ и $x^4 + 3x^3 + x^2 - 4x - 6 = 0$ имеют два общих корня. Найдите их.
6. Сколько существует пар натуральных чисел (a, b) , $1 \leq a \leq 10, 1 \leq b \leq 10, a > b$, для которых число $a^{2015} + b^{2015}$ делится нацело на число $a - b$?
7. Числа a, b удовлетворяют равенствам $a^3 - 3a^2 + 5a = 1$ и $b^3 - 3b^2 + 5b = 5$. Найдите $a + b$.
8. Имеется n целых чисел $0, 1, 2, \dots, n-1$. Переставив эти числа в случайном порядке, получим некоторую перестановку (i_1, i_2, \dots, i_n) . Из исходного набора чисел $(0, 1, 2, \dots, n-1)$ и этой перестановки (i_1, i_2, \dots, i_n) получим новый набор чисел (a_1, a_2, \dots, a_n) по правилу: $a_1 = r_n(0 + i_1), a_2 = r_n(1 + i_2), \dots, a_n = r_n((n-1) + i_n)$, где $r_n(m)$ – остаток от деления числа m на число n . (Например, пусть $n = 3$. Тогда, из исходного набора $(0, 1, 2)$ и перестановки $(i_1, i_2, i_3) = (1, 2, 0)$ получится набор $(a_1, a_2, a_3) = (1, 0, 2)$, т.к. $r_3(0+1) = 1, r_3(1+2) = 0, r_3(2+0) = 2$.)
- а) При $n = 5$ приведите пример такой перестановки (i_1, i_2, \dots, i_5) , что в соответствующем наборе (a_1, a_2, \dots, a_5) все числа различны;
- б) докажите, что, если $n = 6$, то какую бы перестановку (i_1, i_2, \dots, i_6) мы ни взяли, в наборе (a_1, a_2, \dots, a_6) обязательно встретятся одинаковые числа.