XXIII
Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ

Москва 2014

Оглавление

Приводимые задания предлагались в трех возрастных категориях (9, 10, 11 классы) по два равноценных по сложности варианта в 9 и 10 классах и по два равноценных по сложности варианта в каждом из трех регионов (ЗАПАД, СИБИРЬ, ВОСТОК) для участников 11 класса. Тематика отдельных задач в разных классах пересекается, при этом младшим классам предлагались более легкие варианты заданий.

9 КЛАСС
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. На соревнованиях беговых роботов было представлено некоторое количество механизмов. Роботов выпускали на одну и ту же дистанцию попарно. В протоколе фиксировались разности времен финиша победителя и побежденного в каждом из забегов. Все они оказались разными: **1** сек., **2** сек., **3** сек., **4** сек., **5** сек., **6** сек. Известно, что в ходе бегов каждый робот соревновался с каждым ровно один раз, и что каждый робот всегда бегал с одной и той же скоростью. Определите число представленных на бегах механизмов, а также время прохождения дистанции каждым из них, если лучшее время прохождения дистанции было равно 30 секундам.

2. В таблицу, состоящую из n строк и m столбцов, записаны числа так, что сумма элементов в каждой строке равна 790, а сумма элементов в каждом столбце равна 1422. Найдите числа n и m, при которых выражение $3n - 4m$ принимает *наименьшее возможное натуральное* значение. При найденных параметрах n и m приведите пример указанной таблицы, в которой не все элементы одинаковы.

3. Стёпа и Миша разработали следующую систему шифрования. Исходный текст, записанный без пробелов, разбивается последовательно на части по 10 букв. В каждой части буквы нумеруются слева направо от 1 до 10 и затем переставляются по правилу, которое задаётся таблицей 1. То есть, первая буква каждой части ставится на 7 место, вторая – на 9 место и т.д. Однажды Стёпа собрался отправить сообщение Мише. Он его зашифровал, а потом, для пущей надежности, зашифровал полученный текст еще раз. Подумал, и зашифровал его еще 75 раз. В результате Миша получил вот такое сообщение:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	9	2	8	6	5	1	3	10	4

*Табл.*1

«**ыновтекнафнтеамошйек**»

Помогите Мише его прочитать.

4. Функции $f_0(x), f_1(x), \dots, f_6(x)$ с областью определения $\{0,1,2,3\}$ и областью значений $\{0,1,2,3\}$ заданы таблицами (табл.2).

Табл. 2

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$
0	0	1	3	2	0	0	0
1	1	0	2	3	2	2	1
2	2	3	0	1	1	3	3
3	3	2	1	0	3	1	2

(а) для функции $f(x)$, заданной равенствами $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$, $f(3) = 3$ подберите различные числа $a, b, c \in \{0,1,\dots,6\}$ такие, чтобы соотношение

$$f(x) = f_c\left(f_b\left(f_a(x)\right)\right) \tag{1}$$

выполнялось для всех $x = 0,1,2,3$;

(б) докажите, что для любой функции $f(x)$ с областью определения $\{0,1,2,3\}$ и областью значений $\{0,1,2,3\}$, переводящей разные элементы в разные, найдутся числа $a, b, c \in \{0,1,\dots,6\}$ (не обязательно различные) при которых выполнено равенство (1).

5. Разблокировка коммуникатора осуществляется вводом 4-значного числового кода на сенсорном экране. На клавиатуре первоначальная расстановка цифр после ввода кода меняется в зависимости от случайного простого числа k от 7 до 2017, и на месте цифры i отображается значение a_i, равное последней цифре числа $i \cdot k$. Пользователь вводит цифры из левой колонки левой рукой, а остальные правой. Восстановите код блокировки, если известно, что при наборе кода пользователь вводил цифры следующим образом:

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

$\longrightarrow$

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9
	a_0	

— при $a_3 = 3$: левой, правой, правой, правой;

— при $a_3 = 9$: правой, правой, левой, левой;

— при $a_3 = 1$: левой, левой, правой, правой;

— при $a_3 = 7$: правой, правой, левой, правой.

6. Для зашифрования слова из 5 букв на русском языке его: 1) преобразовали с помощью таблицы (рис. 1) в цепочку чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, 2) выбрали (секретное) натуральное число k_1 и дописали сумму $x_6 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + k_1$ к цепочке справа, 3) в расширенной цепочке $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ числа x_i заменили числами y_i по формулам: $y_i = 2x_i + x_{i+1} + k_2$, если i нечетное; $y_i = x_{i-1} + x_i + k_1$, если i четное, где k_2 еще одно (секретное) натуральное число и, наконец, 4) каждое y_i заменили его остатком от деления на 31. В результате получили вот что:

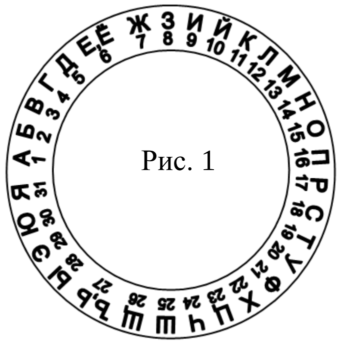


Рис. 1

28, 12, 5, 0, 11, 14.

Найдите исходное сообщение.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.

Пусть в забеге участвовало N роботов. Из условия задачи следует, что количество «попарных» забегов (т.е. каждый с каждым) равно 6. Это число равно

$$N - 1 + N - 2 + \cdots + 1 = \frac{N(N-1)}{2},$$

поскольку первый робот должен пробежать с $N - 1$ другими роботами, второй уже с $N - 2$ другими и т.д. Имеем квадратное уравнение:

$$\frac{N(N-1)}{2} = 6,$$

из которого находим, что его единственное натуральное решение $N = 4$.

Обозначим через $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ - временные результаты забегов 4-х роботов в порядке их строгого возрастания. Ясно, что самый медленный робот с результатом t_4 отстал от самого быстрого ($t_1 = 30$) на 6 секунд и поэтому его результат - $t_4 = 36$ секунд. Остается найти $t_2,\ t_3$.

Поскольку в одном из забегов имеется разность 5 секунд, то перебирая все возможные случаи и используя тот факт, что разности времен забегов - целые числа, придем к двум возможным вариантам:

1. $t_3 - t_1 = 5$, откуда $t_3 = 35$;
2. $t_4 - t_2 = 5$, откуда $t_2 = 31$.

В обоих вышеперечисленных случаях результат забега оставшегося робота определяется однозначно: $t_2 = 32$, $t_3 = 34$ соответственно, в силу того, что разности времен забегов различны.

Ответ: 30, 32, 35, 36 или 30, 31, 34, 36.

Задача 2.

Сумма всех элементов таблицы равна $790 \cdot n$ и в то же время она равна $1422 \cdot m$, поэтому:

$$790 \cdot n = 1422 \cdot m \Leftrightarrow 5 \cdot n = 9 \cdot m.$$

Отсюда $5 \cdot n$ кратно 9 и $9 \cdot m$ кратно 5, а поскольку НОД(5,9)=1, постольку из свойств делимости вытекает, что $n = 9k, m = 5k, k \in \mathbb{N}$.

Наименьшее значение выражения

$$3n - 4m = 27k - 20k = 7k,$$

очевидно, равно 7 при $k = 1$. В таком случае $n = 9, m = 5$. Одним из примеров такой таблицы может быть:

150	166	158	158	158
166	150	158	158	158
158	158	158	158	158
158	158	158	158	158
158	158	158	158	158
158	158	158	158	158
158	158	158	158	158
158	158	158	158	158
158	158	158	158	158

Ответ: 7.

Задача 3.

Заметим, что буквы переставляются по правилу

$$1\to7\to1,\ 2\to9\to10\to4\to8\to3\to2$$

$$5 \to 6 \to 5.$$

Значит, каждая буква из первой и третьей цепочки встанет на свое место после 2-х шифрований, а из второй цепочки – после 6-х шифрований. Стало быть, все буквы встанут на свое место через 6 шифрований. Таким образом, через каждые 6 шифрований снова будет появляться исходный текст.

Степа зашифровывал свое сообщение 77 раз. Поделим с остатком 77 на 6:

$$77 = 6 \cdot 12 + 5.$$

Значит, если зашифровать текст, который получил Миша еще раз, то получим 78 шифрований, где число 78 кратно 6, и получится исходное сообщение:

«КОНФЕТЫВНАШЕЙКОМНАТЕ».

Ответ: КОНФЕТЫВНАШЕЙКОМНАТЕ.

Задача 4.

(б) Пусть $f(x_0)=0, f(x_1)=1, f(x_2)=2, f(x_3)=3$. Выберем среди $f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ такую функцию $f_a(x)$, что $f_a(x_0)=0$. Пусть $f_a(x_1)=y_1$. Ясно, что $y_1 \neq 0$. Выберем среди $f_0(x), f_4(x), f_5(x)$ функцию $f_b(x)$ такую, что $f_b(y_1)=1$. Тогда функция $\tau(x)=f_b(f_a(x))$ удовлетворяет условию $\tau(x_0)=0$, $\tau(x_1)=1$. Пусть $\tau(x_2)=y_2$. Ясно, что $y_2 \neq 0{,}1$. Выберем среди $f_0(x), f_6(x)$ функцию $f_c(x)$ такую, что $f_c(y_2)=2$. Тогда функция $\sigma(x)=f_c(f_b(f_a(x)))$ удовлетворяет равенствам $\sigma(x_0)=0$, $\sigma(x_1)=1, \sigma(x_2)=2$. Значит $\sigma(x_3)=3$ и $\sigma(x)=f(x)$ для всех $x=0,1,2,3$.

(а) Используя рассуждения п. (б), можно прийти к одному из вариантов ответа: $a=2$, $b=5$, $c=6$.

Ответ: (а) $a=2$, $b=5$, $c=6$.

Задача 5.

Из признаков делимости на 2 и на 5 следует, что простое число $k \geq 7$ не может оканчиваться на четную цифру и на цифру 5. Следовательно, такое простое число может оканчиваться лишь на цифры 1, 3, 7, 9.

Обозначим, через $r(a)$ – последнюю цифру числа a, тогда ясно, что выполняется свойство:

$$r(a \cdot b) = r\big(r(a) \cdot r(b)\big).$$

Поэтому раскладка клавиатуры определяются лишь указанными последними цифрами – 1, 3, 7, 9. Таким образом, возможны 4 варианта раскладки клавиатуры:

$k =_* 1$

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

$k =_* 3$

3	6	9
2	5	8
1	4	7
	0	

$k =_* 7$

7	4	1
8	5	2
9	6	3
	0	

$k =_* 9$

9	8	7
6	5	4
3	2	1
	0	

Теперь несложно понять, что в условиях задачи следует рассматривать все раскладки:

$a_3 = 3$

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

$a_3 = 9$

3	6	9
2	5	8
1	4	7
	0	

$a_3 = 1$

7	4	1
8	5	2
9	6	3
	0	

$a_3 = 7$

9	8	7
6	5	4
3	2	1
	0	

Первая цифра кода при $a_3 = 3$ находится в первом столбце, значит это 1, 4 или 7, при $a_3 = 1$ эта цифра лежит также в первом столбце – следовательно, она равна 7. Вторая цифра кода при $a_3 = 1$ лежит в первом столбце, значит это 7, 8 или 9. Во всех остальных раскладках она лежит в других столбцах (2-ом или 3-ем). Как видно, таким свойством обладает только цифра 8. Аналогичным образом рассуждая, придем к тому, что единственной комбинацией, удовлетворяющей условиям задачи, будет 7832.

Ответ: 7832.

Задача 6.

Выпишем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + k_2 = 28 = y_1, \\ x_1 + x_2 + k_1 = 13 = y_2, \\ 2x_3 + x_4 + k_2 = 5 = y_3, \\ x_3 + x_4 + k_1 = 1 = y_4, \\ 2x_5 + x_6 + k_2 = 12 = y_5, \\ x_5 + x_6 + k_1 = 16 = y_6, \end{cases}$$

где $x_6 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + k_1$. Сложив каждое четное уравнение системы, получим: $2(x_6 + k_1) = \sum_{i-чет} y_i = 30$ и $x_6 + k_1 = 15$.

Из двух последних уравнений системы, находим: $x_6 + k_2 = 2(x_6 + k_1) - 2y_6 + y_5 = 10$. Возьмем разность двух полученных уравнений, находим: $k_1 - k_2 = 5$.

Теперь нетрудно установить, что:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - y_2 + (k_1 - k_2) = 20, \\ x_3 &= y_3 - y_4 + (k_1 - k_2) = 9, \\ x_5 &= y_5 - y_6 + (k_1 - k_2) = 1. \end{aligned}$$

В результате имеем:

У		И		А

А если отнять из второго уравнения системы четвертое, можно установить, что:

$$x_2 - x_4 = y_2 - y_4 - (x_1 - x_3) = 1.$$

то есть четные буквы находятся путем перебора вариантов для второй буквы.

Ответ: УЛИКА.

10 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. На соревнованиях беговых роботов было представлено некоторое количество механизмов. Роботов выпускали на одну и ту же дистанцию попарно. В протоколе фиксировались разности времен финиша победителя и побежденного в каждом из забегов. Все они оказались разными: **1** сек., **2** сек., **3** сек., **4** сек., **5** сек., **6** сек. Известно, что в ходе бегов каждый робот соревновался с каждым ровно один раз, и что каждый робот всегда бегал с одной и той же скоростью. Определите число представленных на бегах механизмов, а также время прохождения дистанции каждым из них, если лучшее время прохождения дистанции было равно 30 секундам.

2. В таблицу, состоящую из n строк и m столбцов, записаны числа так, что сумма элементов в каждой строке равна 1284, а сумма элементов в каждом столбце равна 1070. Найдите числа n и m, при которых выражение $3n - 2m$ принимает *наименьшее возможное натуральное* значение. При найденных параметрах n и m приведите пример указанной таблицы, в которой не все элементы одинаковы.

3. Винтик и Шпунтик используют следующую систему шифрования. Исходный текст, записанный без пробелов, разбивается последовательно на части по 10 букв. В каждой части буквы нумеруются слева направо от 1 до 10 и затем переставляются по правилу, которое задаётся таблицей 1. То есть, первая буква каждой части ставится на 7 место, вторая – на 9 место и т.д. Однажды Винтик собрался отправить сообщение Шпунтику. Он его зашифровал, а потом, для пущей надежности, зашифровал полученный текст еще раз. Подумал, и зашифровал его еще 333 раза. В результате Шпунтик получил вот такое сообщение:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	9	8	1	3	2	4	10	6	5

*Табл.*1

«**сьтуемнсеяиклеонкасо**».

Помогите Шпунтику его прочитать.

4. Разблокировка коммуникатора осуществляется вводом 4-значного числового кода на сенсорном экране. При каждом последующем включении устройства, цифры на клавиатуре появляются по закону: на месте цифры a_i из предыдущего включения появляется цифра b_i, равная последней цифре числа $3a_i + 1$. Пользователь вводит цифры из левой колонки левой рукой, а остальные правой. Определите возможные коды блокировки, если известно, что при наборе кода при четырёх последовательных включениях коммуникатора, пользователь вводил цифры следующим образом:

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9
	a_0	

→

b_1	b_2	b_3
b_4	b_5	b_6
b_7	b_8	b_9
	b_0	

- правой, правой, правой, левой;
- левой, правой, левой, правой;
- правой, левой, левой, левой;
- левой, левой, правой, правой.

5. Функции $f_0(x), f_1(x), \dots, f_6(x)$ с областью определения $\{0,1,2,3\}$ и областью значений $\{0,1,2,3\}$ заданы таблицами (табл.2).

Табл. 2

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$
0	0	3	2	1	0	0	0
1	1	0	3	3	2	2	1
2	2	1	0	2	1	3	3
3	3	2	1	0	3	1	2

(а) для функции $f(x)$, заданной равенствами $f(0) = 3$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 0$ подберите различные числа $a, b, c \in \{0,1,\dots,6\}$ такие, чтобы соотношение

$$f(x) = f_c\Big(f_b\big(f_a(x)\big)\Big) \qquad (1)$$

выполнялось для всех $x = 0,1,2,3$;

(б) докажите, что для любой функции $f(x)$ с областью определения $\{0,1,2,3\}$ и областью значений $\{0,1,2,3\}$, переводящей разные элементы в разные, найдутся числа $a, b, c \in \{0,1,\ldots,6\}$ (не обязательно различные) при которых выполнено равенство (1).

6. Для шифрования сообщения из 9 букв на русском языке его 1) преобразовали с помощью таблицы (рис. 1) в цепочку чисел $x_1, x_2, \ldots, x_9$, 2) выбрали (секретное) натуральное число k_1 и дописали сумму $x_{10} = x_1 + x_2 + \ldots + x_9 + k_1$ к цепочке справа, 3) в расширенной цепочке $x_1, x_2, \ldots, x_9, x_{10}$ числа x_i заменили числами y_i по формулам: $y_i = 2x_i + x_{i+1} + (-1)^{\frac{i+1}{2}} k_1$, если i нечетное; $y_i = x_{i-1} + x_i + (-1)^{\frac{i}{2}} k_2$, если i четное, где k_2 еще одно (секретное) натуральное число и, наконец, 4) каждое y_i заменили его остатком от деления на 32. В результате получили вот что: **9, 8, 7, 12, 28, 29, 31, 8, 25, 8.** Найдите исходное сообщение.

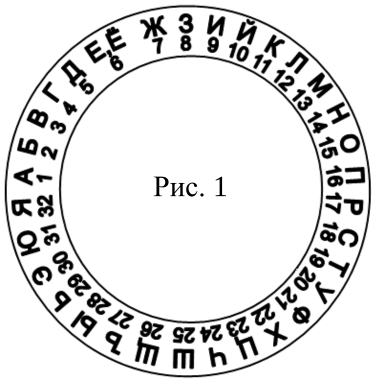


Рис. 1

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.

Пусть в забеге участвовало N роботов. Из условия задачи следует, что количество «попарных» забегов (т.е. каждый с каждым) равно 6. Это число равно

$$N - 1 + N - 2 + \cdots + 1 = \frac{N(N-1)}{2},$$

поскольку первый робот должен пробежать с $N-1$ другими роботами, второй уже с $N-2$ другими и т.д. Имеем квадратное уравнение:

$$\frac{N(N-1)}{2} = 6,$$

из которого находим, что его единственное натуральное решение $N = 4$.

Обозначим через $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ - временные результаты забегов 4-х роботов в порядке их строгого возрастания. Ясно, что самый медленный робот с результатом t_4 отстал от самого быстрого ($t_1 = 30$) на 6 секунд и поэтому его результат - $t_4 = 36$ секунд. Остается найти $t_2,\ t_3$.

Поскольку в одном из забегов имеется разность 5 секунд, то перебирая все возможные случаи и используя тот факт, что разности времен забегов - целые числа, придем к двум возможным вариантам:

3. $t_3 - t_1 = 5$, откуда $t_3 = 35$;
4. $t_4 - t_2 = 5$, откуда $t_2 = 31$.

В обоих вышеперечисленных случаях результат забега оставшегося робота определяется однозначно: $t_2 = 32$, $t_3 = 34$ соответственно, в силу того, что разности времен забегов различны.

Ответ: 30, 32, 35, 36 или 30, 31, 34, 36.

Задача 2.

Сумма всех элементов таблицы равна $1284 \cdot n$ и в то же время она равна $1070 \cdot m$, поэтому:

$$1284 \cdot n = 1070 \cdot m \Leftrightarrow 6 \cdot n = 5 \cdot m.$$

Отсюда $6 \cdot n$ кратно 5 и $5 \cdot m$ кратно 6, а поскольку НОД(6,5)=1, постольку из свойств делимости вытекает, что $n = 5k, m = 6k, k \in \mathbb{N}$.

Наименьшее значение выражения

$$3n - 2m = 15k - 12k = 3k,$$

очевидно, равно 3 при $k = 1$. В таком случае $n = 5, m = 6$. Одним из примеров такой таблицы может быть:

200	228	214	214	214	214
228	200	214	214	214	214
214	214	214	214	214	214
214	214	214	214	214	214
214	214	214	214	214	214

Ответ: 3.

Задача 3.

Заметим, что буквы переставляются по правилу

$$1 \to 7 \to 4 \to 1,$$

$$2 \to 9 \to 6 \to 2,$$

$$3 \to 8 \to 10 \to 5 \to 3.$$

Значит, каждая буква из первой и второй цепочки встанет на свое место после 3-х шифрований, а из третьей цепочки – после 4-х шифрований. Стало быть, все буквы встанут на свое место через 12 = 3 · 4 шифрований. Таким образом, через каждые 12 шифрований снова будет появляться исходный текст.

Винтик зашифровывал свое сообщение 335 раз. Поделим с остатком 335 на 12:

$$335 = 12 \cdot 27 + 11.$$

Значит, если зашифровать текст, который получил Шпунтик еще раз, то получим 336 шифрований, где число 336 кратно 12, и получится исходное сообщение:

«УМЕНЯЕСТЬСЕНОКОСИЛКА».

Ответ: У МЕНЯ ЕСТЬ СЕНОКОСИЛКА.

Задача 4.

Пусть в некоторый момент времени на i-том месте клавиатуры располагалась цифра a_i. Посмотрим, в какие цифры она переходит в результате 4-х последовательных преобразований:

$$a_i \to r_{10}(3a_i + 1) \to r_{10}(3(3a_i + 1) + 1) = r_{10}(9a_i + 4) \to$$
$$\to r_{10}(3(9a_i + 4) + 1) = r_{10}(7a_i + 3) \to r_{10}(3(7a_i + 3) + 1) = a_i,$$

где $r_{10}(x)$ – остаток от деления числа x на 10. Таким образом, каждые 4 преобразования раскладок имеем цепочку цифр:

$$a_i \to r_{10}(3a_i + 1) \to r_{10}(9a_i + 4) \to r_{10}(7a_i + 3),$$

которая затем будет повторяться. А значит, если в первый момент времени была стандартная раскладка клавиатуры:

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

а

то в следующие моменты времени будем иметь последовательность раскладок:

4	7	0
3	6	9
2	5	8
	1	

б

→

3	2	1
0	9	8
7	6	5
	4	

в

→

0	7	4
1	8	5
2	9	6
	3	

г

И последовательность *а*-*б*-*в*-*г* в дальнейшем будет повторяться.

Теперь, чтобы ответить на вопрос задачи, необходимо выяснить какая раскладка из *а, б, в, г* могла быть в начальный момент времени. Для этого переберем четыре возможных варианта.

1) Последовательности ввода рук соответствует последовательность раскладок *а*-*б*-*в*-*г*. Тогда первая цифра кода находится в левой колонке раскладок *б* и *г*. Ясно, что это может быть только цифра 2. Вторая цифра кода располагается в левой колонке раскладок *в* и *г*. Откуда получим, что это цифра 0. Аналогично продолжая рассуждения, получим возможный код блокировки – 2037.
2) Последовательности ввода рук соответствует последовательность раскладок *г*-*а*-*б*-*в*. Тогда первая цифра кода находится в левой колонке раскладок *а* и *в*. Ясно, что это может быть только цифра 7. Вторая цифра кода располагается в левой колонке раскладок *б* и *в*. Откуда получим, что это цифра 3. Аналогично продолжая рассуждения, получим возможный код блокировки – 7342.
3) Последовательности ввода рук соответствует последовательность раскладок *в*-*г*-*а*-*б*. Тогда первая цифра кода находится в левой колонке раскладок *б* и *г*. Ясно, что это может быть только цифра 2. Вторая цифра кода располагается в левой колонке раскладок *а* и *б*. Откуда получим, что это цифра 4. Аналогично продолжая рассуждения, получим возможный код блокировки – 2417.
4) Последовательности ввода рук соответствует последовательность раскладок *б*-*в*-*г*-*а*. Тогда первая цифра кода находится в левой колонке раскладок *а* и *в*. Ясно, что это может быть только цифра 7. Вторая цифра кода располагается в левой колонке раскладок *а* и *г*. Откуда

получим, что это цифра 1. Аналогично продолжая рассуждения, получим возможный код блокировки – 7102.

Таким образом, возможны все четыре варианта последовательностей раскладок клавиатуры.

Ответ: 2037, 7342, 2417, 7102.

Задача 5.

(б) Пусть $f(x_0) = 0,\ f(x_1) = 1,\ f(x_2) = 2,\ f(x_3) = 3$. Выберем среди $f_0(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ такую функцию $f_a(x)$, что $f_a(x_0) = 0,\ a \in \{0,1,2,3\}$ (ее можно выбрать, поскольку указанные функции принимают значение 0 при различных $x = 0,1,2,3$).

Пусть $f_a(x_1) = y_1$, тогда $y_1 \neq 0$, в силу того, что функция $f_a(x)$ разные значения переводит в разные. Выберем среди $f_4(x), f_5(x), f_6(x)$ функцию $f_b(x)$, что $f_b(y_1) = 1,\ b \in \{4,5,6\}$ (ее можно выбрать, поскольку указанные функции принимают значение 1 при различных $x = 1,2,3$ и при этом $f_b(0) = 0$). Тогда легко проверить, что функция $g(x) = f_b\big(f_a(x)\big)$ удовлетворяет условию $g(x_0) = 0,\ g(x_1) = 1$, и кроме того $g(x)$ каждое свое значение принимает ровно один раз. Отсюда в частности вытекает, что $g(x_2) = y_2 \neq 0; 1$.

Теперь выберем среди $f_0(x), f_6(x)$ функцию $f_c(x)$, что $f_c(y_2) = 2,\ c \in \{0,6\}$ (ее можно выбрать, поскольку указанные функции принимают значение 2 при различных $x = 2,3$ и при этом $f_c(0) = 0, f_c(1) = 1$). Тогда функция $h(x) = f_c\big(g(x)\big)$ удовлетворяет равенствам $h(x_0) = 0, h(x_1) = 1, h(x_2) = 2$ и также каждое свое значение принимает ровно один раз. Отсюда придем к тому, что $h(x_3) = 3$ и, стало быть, $h(x) = f_c\Big(f_b\big(f_a(x)\big)\Big) = f(x)$ для всех $x = 0,1,2,3$.

(а) Используя рассуждения п. (б), можно прийти к одному из вариантов ответа $a = 3, b = 5, c = 6$.

Ответ: (а) $a = 3, b = 5, c = 6$.

Задача 6.

Выпишем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - k_1 = 9 = y_1, \\ x_1 + x_2 - k_2 = 8 = y_2, \\ 2x_3 + x_4 + k_1 = 7 = y_3, \\ x_3 + x_4 + k_2 = 12 = y_4, \\ \vdots \\ 2x_9 + x_{10} - k_1 = 25 = y_9, \\ x_9 + x_{10} - k_2 = 8 = y_{10}, \end{cases}$$

где $x_{10} = \sum_{i=1}^{9} x_i + k_1$. Сложив каждое четное уравнение системы, получим: $(x_{10} - k_1) + (x_{10} - k_2) = \sum_{i-чет} y_i = 1$. Из двух последних уравнений системы получаем:

$$2(x_{10} - k_2) - (x_{10} - k_1) = 2y_{10} - y_9 = 23.$$

Складывая полученные уравнения, имеем: $3(x_{10} - k_2) = 24$, то есть $(x_{10} - k_2) = 8$. С учетом последнего уравнения системы:

$$x_9 = y_{10} - (x_{10} - k_2) = 0.$$

Возьмем разность двух последних уравнений системы: $k_1 - k_2 = x_9 + y_{10} - y_9 = 15$.

Далее, из любой пары уравнений (для (x_1, x_2), (x_3, x_4) и т.д.) нетрудно получить два следствия:

$$x_{i-1} + (-1)^n (k_1 - k_2) = y_{i-1} - y_i, \qquad x_i + (-1)^{n+1} (k_1 - 2k_2) = 2y_i - y_{i-1}$$

где n - номер пары, i меняется от 2 до 14. Переходим от исходной системы к системе с такими уравнениями. Тогда получаем, что с учетом найденной разницы $k_1 - k_2$ все нечетные x_{i-1} находятся однозначно: $x_1 = 16,\ x_3 = 12,\ \ldots$

В результате имеем:

П		Л		Н		З		Я

А если сложить два уравнения для x_i и x_{i+2} (i - четное):

$$x_i + (-1)^{n+1} (k_1 - 2k_2) = 2y_i - y_{i-1}, \qquad x_{i+2} + (-1)^{n+2} (k_1 - 2k_2) = 2y_{i+2} - y_{i+1},$$

то получим: $x_i + x_{i+2} = 2y_i - y_{i-1} + 2y_{i+2} - y_{i+1}$ и можно найти суммы:

$$x_2 + x_4 = 24, \quad x_4 + x_6 = 15, \ldots$$

то есть все четные буквы находятся путем перебора вариантов для второй буквы.

Ответ: ПОЛИНЕЗИЯ.

11 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Пончик и Незнайка используют следующую систему шифрования. Исходный текст, записанный без пробелов, разбивается на части по 15 букв. В каждой части буквы нумеруются слева направо от 1 до 15 и затем переставляются по правилу, которое задаётся таблицей 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
14	5	9	15	10	4	3	7	12	11	13	6	1	2	8

Табл. 1

То есть, первая буква каждой части ставится на 14 место, вторая – на 5 место и т.д. Однажды Незнайка собрался отправить сообщение Пончику. Он зашифровал его, а потом, для пущей надежности, зашифровал полученный текст еще раз. Подумал, и зашифровал его еще 2013 раз. В результате Пончик получил вот такое сообщение: «**яттзоелотисспосоамвьртсачсваве**». Помогите Пончику его прочитать.

2. На соревнованиях беговых роботов было представлено некоторое количество механизмов. Роботов выпускали на одну и ту же дистанцию попарно. В протоколе фиксировались разности времен финиша победителя и побежденного в каждом из забегов. Все они оказались разными: **1** сек., **2** сек., **3** сек., **4** сек., **5** сек., **6** сек., **7** сек., **10** сек., **11** сек., **13** сек. Известно, что в ходе бегов каждый робот соревновался с каждым ровно один раз, и что каждый робот всегда бегал с одной и той же скоростью. Определите число представленных на бегах механизмов, а также время прохождения дистанции каждым из них, если лучшее время прохождения дистанции было равно 50 секундам.

3. В таблицу, состоящую из n строк и m столбцов, записали числа (не обязательно целые) так, что сумма элементов в каждой строке равна 408, а сумма элементов в каждом столбце равна 340. После чего к таблице приписали k столбцов, сумма элементов в каждом из которых равна 476, и столбец, сумма элементов в котором равна 272. Получили таблицу, в которой сумма элементов в каждой строке равна 544. Найдите числа n, m и k, при которых выражение $2n-3m+6k$ принимает *наименьшее возможное* *натуральное* значение. При найденных параметрах n, m и k приведите пример указанной таблицы.

4. Для хранения пароля, записанного в 32-х буквенном алфавите, каждая его буква представляется порядковым номером - парой цифр (т.е. А - 01, Б - 02 и т.д. как на рис.1). Получается последовательность цифр $y_1, y_2, y_3, \ldots$. Одновременно по правилу $x_{i+1} = r_{10}(ax_i + b)$, $i \in \mathbb{N}$, вырабатывается последовательность десятичных цифр (x_i), минимальный период которой равен 10, где $r_{10}(x)$ – остаток от деления x на 10, a и b – натуральные числа. После чего по правилу $c_i = r_{10}(x_i + y_i)$ вычисляется последовательность (c_i), которая и сохраняется в памяти компьютера. Вася выбрал для пароля очень короткое слово, поэтому при вводе был вынужден повторить его дважды. Помогите ему восстановить забытый пароль, если сохраненная последовательность (c_i) имеет вид: **3 5 8 4 3 8 8 2 7 9 2 8 7 2 2 6.**

5. Функции $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{10}(x)$ с областью определения $\{0,1,2,3,4\}$ и областью значений $\{0,1,2,3,4\}$ заданы следующими таблицами:

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$	$f_7(x)$	$f_8(x)$	$f_9(x)$	$f_{10}(x)$
0	0	3	4	3	2	0	0	0	0	0	0
1	1	0	2	4	3	3	4	3	1	1	1
2	2	1	0	1	4	1	2	4	4	3	2
3	3	2	1	0	1	4	1	2	2	4	4
4	4	4	3	2	0	2	3	1	3	2	3

(а) для функции $f(x)$, заданной равенствами $f(0)=1$, $f(1)=2$, $f(2)=4$, $f(3)=0$, $f(4)=3$, найдите *различные* числа $a,b,c,d \in \{0,1,\ldots,10\}$ так, чтобы соотношение $f(x) = f_d(f_c(f_b(f_a(x))))$ выполнялось *для всех* $x = 0,1,2,3,4$; (б) докажите, что для любой функции $f(x)$ с областью определения $\{0,1,2,3,4\}$ и областью значений $\{0,1,2,3,4\}$, переводящей разные элементы в разные, найдутся числа $a,b,c,d \in \{0,1,\ldots,10\}$ (не обязательно различные) при которых равенство $f(x) = f_d(f_c(f_b(f_a(x))))$ выполняется *для всех* $x = 0,1,2,3,4$.

6. Для шифрования сообщения из 13 букв на русском языке проделали следующие действия: 1) преобразовали последовательно буквы сообщения с помощью таблицы (рис.1) в цепочку чисел $x_1, x_2, \dots, x_{13}$; 2) выбрали (секретное) натуральное число k_1 и дописали сумму $x_{14} = x_1 + x_2 + \cdots + x_{13} + k_1$ к цепочке справа; 3) в расширенной цепочке

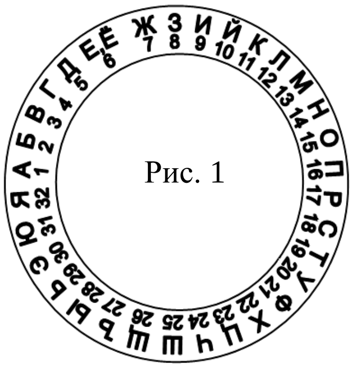


Рис. 1

$x_1, x_2, \dots, x_{13}, x_{14}$ числа x_i заменили числами y_i по формулам: $y_i = 2x_i + x_{i+1} + (-1)^{\frac{i+1}{2}} k_1$, если i нечетное и $y_i = x_{i-1} + x_i + (-1)^{\frac{i}{2}} k_2$, если i четное, где k_2 еще одно (секретное) натуральное число; 4) каждое y_i заменили его остатком от деления на 32. В результате получили вот что: **20, 31, 12, 11, 6, 9, 5, 9, 14, 27, 9, 10, 11, 16.** Найдите исходное сообщение.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1.

Заметим, что буквы переставляются по правилу

$$1 \to 14 \to 2 \to 5 \to 10 \to 11 \to 13 \to 1,$$

$$3 \to 9 \to 12 \to 6 \to 4 \to 15 \to 8 \to 7 \to 3.$$

Значит, каждая буква из первой цепочки встанет на свое место после 7 шифрований, а из второй цепочки – после 8 шифрований. А все буквы встанут на свое место через $56 = 7 \cdot 8$ шифрований. Таким образом, через каждые 56 шифрований снова будет появляться исходный текст. Незнайка зашифровывал свое сообщение 2015 раз. Поделим с остатком 2015 на 56:

$$2015 = 56 \cdot 35 + 55.$$

Значит, если зашифровать текст, который получил Пончик еще раз, то получим 2016 шифрований, где число 2016 кратно 56, а значит, получится исходное сообщение.

«ПОЛЕТСОСТОИТСЯЗАВТРАВСЕМЬЧАСОВ».

Ответ: «ПОЛЕТ СОСТОИТСЯ ЗАВТРА В СЕМЬ ЧАСОВ».

Задача 2.

Пусть в забеге участвовало N роботов. Из условия задачи следует, что количество «попарных» забегов (т.е. каждый с каждым) равно 10. Это число равно

$$N-1+N-2+\cdots+1=\frac{N(N-1)}{2},$$

поскольку первый робот должен пробежать с $N-1$ другими роботами, второй уже с $N-2$ другими и т.д. Имеем квадратное уравнение:

$$\frac{N(N-1)}{2}=10,$$

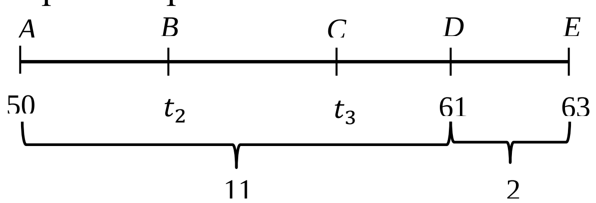
из которого находим, что его единственное натуральное решение $N=5$.

Обозначим через $t_1<t_2<t_3<t_4<t_5$ - временные результаты забегов 5-ти роботов в порядке их строгого возрастания. Ясно, что самый медленный робот с результатом t_5 отстал от самого быстрого ($t_1=50$) на 13 секунд и поэтому его результат - $t_5=63$ секунды. Найдем t_2, t_3, t_4.

Поскольку в одном из забегов имеется разность 11 секунд, то перебирая все возможные случаи и используя тот факт, что разности времен забегов - целые числа, придем к двум возможным вариантам:

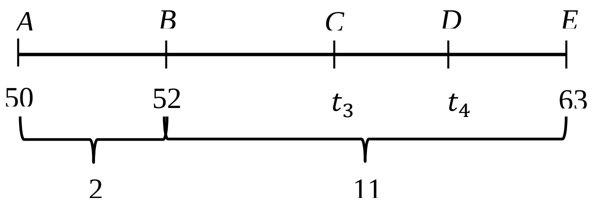
1. $t_4-t_1=11$, откуда $t_4=61$;
2. $t_5-t_2=11$, откуда $t_2=52$.

Рассмотрим первый вариант:



В одном из забегов имеется разность 10 секунд, а в другом разность – 1 секунда. С учетом этого, а также того, что разности времен забегов различны и в них отсутствуют числа 8 и 9, 12, придем к тому, что длина $|AC|=10$, а, следовательно, $|CD|$=1. Отсюда имеем $t_3=60$. Остается найти значение t_2. Длина отрезка AC может получиться путем сложения 7 и 3 или 6 и 4. В первом случае получим либо два отрезка длины 3 ($|BC|=|CE|$), либо отрезок длины 8 ($|BD|$), что противоречит условию задачи. Значит, $|AB| = 6, |BC| = 4$ (случай, когда $|AB| = 4, |BC| = 6$ также отсекается, иначе $|BE| = 9$). Имеем ответ: $t_1 = 50,\ t_2 = 56,\ t_3 = 60,\ t_4 = 61,\ t_5 = 63$.

Аналогично, рассмотрим второй вариант:



Рассуждая подобным образом, придем к единственному возможному варианту, когда $|CE| = 10$. И тогда $t_3 = 53$. Для нахождения t_4 остается рассмотреть два возможных разбиения отрезка CE на длины 7 и 3 или 6 и 4. В первом случае получим либо два отрезка длины 3 ($|AC| = |CD|$), либо отрезок длины 8 ($|BD|$) - противоречие. Стало быть, $|CD| = 4, |DE| = 6$ (случай, когда $|CD| = 6, |DE| = 4$ не подходит, иначе $|AD| = 9$). Получим ответ: $t_1 = 50,\ t_2 = 52,\ t_3 = 53,\ t_4 = 57,\ t_5 = 63$.

Ответ: 50, 52, 53, 57, 63 или 50, 56, 60, 61, 63.

Задача 3.

Сумма всех элементов таблицы до преобразований равна $408n$ и $340m$, поэтому имеем равенство:

$$408n = 340m, \text{ т.е. } 6n = 5m.$$

После преобразований сумма всех элементов таблицы с одной стороны равна $544n$ и с другой - $340m + 476k + 272$, поэтому:

$$544n = 340m + 476k + 272, \text{ откуда } 8n = 5m + 7k + 4.$$

В итоге имеем систему целочисленных уравнений:

$$\begin{cases} 6n = 5m, \\ 8n = 5m + 7k + 4. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $6n$ кратно 5 и $5m$ кратно 6, а поскольку НОД(6,5)=1, то из свойств взаимной простоты вытекает: $n = 5t,\ m = 6t$, $t \in \mathbb{N}$. С учетом этого второе уравнение примет вид:

$$40t = 30t + 7k + 4, \text{ следовательно, } 10t - 7k = 4.$$

Легко проверить, что система

$$\begin{cases} t = -1 + 7s, \\ k = -2 + 10s, \end{cases}$$

где $s \in \mathbb{Z}$, задает общее целочисленное решение данного уравнения. А так как $t, k \in \mathbb{N}$, то и $s \in \mathbb{N}$. Отсюда получим:

$$n = 5(-1 + 7s) = -5 + 35s,$$

$$m = 6(-1 + 7s) = -6 + 42s.$$

Теперь рассмотрим выражение

$$2n - 3m + 6k = 2(-5 + 35s) - 3(-6 + 42s) + 6(-2 + 10s) =$$

$$= -10 + 70s + 18 - 126s - 12 + 60s = -4 + 4s.$$

Его наименьшее натуральное значение достигается при $s = 2$ и равно 4. При таком s найдем параметры: $n = 65,\ m = 78,\ k = 18$. Приведем пример такой таблицы:

	$\frac{340}{65}$	…	$\frac{340}{65}$	$\frac{476}{65}$	…	$\frac{476}{65}$	$\frac{272}{65}$
65	…		…	…		…	…
	$\frac{340}{65}$	…	$\frac{340}{65}$	$\frac{476}{65}$	…	$\frac{476}{65}$	$\frac{272}{65}$
		78			18		

Ответ: 4 при $n = 65,\ m = 78,\ k = 18$.

Задача 4.

Поскольку длина получившейся последовательности равна 16 и введенное слово повторялось дважды, то последовательность (y_i) является периодической с периодом 8 (и, стало быть, ключевое слово имеет длину 4). Имеем соотношения: $x_{i+10} = x_i$, $y_{i+8} = y_i$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда

$$r_{10}(c_{i+2} - c_{i+10}) = r_{10}(x_{i+2} + y_{i+2} - x_{i+10} - y_{i+10}) = r_{10}(x_{i+2} - x_i).$$

Поэтому, $r_{10}(x_3 - x_1) = 6$, $r_{10}(x_4 - x_2) = 6$. Имеем:

$$r_{10}(x_4 - x_2) = r_{10}(ax_3 + b - ax_1 - b) = r_{10}\big(a(x_3 - x_1)\big) = r_{10}(6a)$$

Получим уравнение: $r_{10}(6a) = 6$. Данному уравнению удовлетворяют два значения $a = 1$ или $a = 6$. Но т.к. период равен 10, то нетрудно проверить, что правильным вариантом является $a = 1$. Тогда

$$6 = r_{10}(x_3 - x_1) = r_{10}(x_2 + b - x_1) = r_{10}(x_1 + 2b - x_1) = r_{10}(2b)$$

Отсюда $b = 3$ или $b = 8$. Аналогично, исходя из периода 10, истинным вариантом будет только $b = 3$. Таким образом, получаем $x_{i+1} = r_{10}(x_i + 3)$.

Теперь для нахождения ключевого слова достаточно перебрать 4 варианта для y_1. При каждом фиксированном y_1, зная c_1, вычисляем x_1, после чего восстанавливаем всю последовательность (x_i) в соответствии с полученным законом рекурсии. Зная (x_i), находим все остальные значения $y_2, \dots, y_8$. Запишем все возможные варианты в таблицу.

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
0	9	9	2	8	0	7	8
1	0	0	3	9	1	8	9
2	1	1	4	0	2	9	0
3	**2**	**2**	**5**	**1**	**3**	**0**	**1**

Единственный читаемый вариант ключевого слова дает последняя строка – «ЯШМА».

Ответ: ЯШМАЯШМА.

Задача 5.

(б) Пусть $f(x_0)=0,\ f(x_1)=1,\ f(x_2)=2,\ f(x_3)=3,\ f(x_4)=4.$ Выберем среди $f_0(x),\ f_1(x), \dots, f_4(x)$ такую функцию $f_a(x),$ что $f_a(x_0)=0.$ Пусть $f_a(x_1)=y_1.$ Ясно, что $y_1 \neq 0$. Выберем среди $f_0(x),\ f_5(x),\ f_6(x)$, $f_7(x)$ функцию $f_b(x)$ такую, что $f_b(y_1)=1.$ Тогда функция $\tau(x)=f_b(f_a(x))$ удовлетворяет условию $\tau(x_0)=0,\ \ \tau(x_1)=1.$ Пусть $\tau(x_2)=y_2.$ Ясно, что $y_2 \neq 0{,}1.$ Выберем среди $f_0(x),\ f_8(x),\ f_9(x)$ функцию $f_c(x)$ такую, что $f_c(y_2)=2.$ Тогда функция $\sigma(x)=f_c(f_b(f_a(x)))$ удовлетворяет равенствам $\sigma(x_0)=0,\ \ \sigma(x_1)=1, \sigma(x_2)=2.$ Пусть $\sigma(x_3)=y_3.$ Ясно, что $y_3 \neq 0{,}1{,}2.$

Выберем среди $f_0(x), f_{10}(x)$ функцию $f_d(x)$ такую, что $f_d(y_3)=3.$ Тогда функция $\nu(x)=f_d(f_c(f_b(f_a(x))))$ удовлетворяет равенствам $\nu(x_0)=0,$ $\nu(x_1)=1, \nu(x_2)=2, \nu(x_3)=3.$ Значит $\nu(x_4)=4$ и $\nu(x)=f(x)$ для всех $x=0,1,2,3,4.$

(а) Используя рассуждения п. (б), можно получить один из вариантов ответа $a=3$, $b=6$, $c=8$, $d=10.$

Задача 6.

К исходному открытому сообщению $x_1, x_2, \dots, x_{13}$ дописали еще одно число и получили $x_1, x_2, \dots, x_{13}, x_1+\dots+x_{13}+k_1$. По условию

$$1)\begin{cases}2x_1+x_2-k_1=20,\\ x_1+x_2-k_2=31,\end{cases}\quad 2)\begin{cases}2x_3+x_4+k_1=12,\\ x_3+x_4+k_2=11,\end{cases}\quad 3)\begin{cases}2x_5+x_6-k_1=6,\\ x_5+x_6-k_2=9,\end{cases}$$

$$4)\begin{cases}2x_7+x_8+k_1=5,\\ x_7+x_8+k_2=9,\end{cases}\quad 5)\begin{cases}2x_9+x_{10}-k_1=14,\\ x_9+x_{10}-k_2=27,\end{cases}\quad 6)\begin{cases}2x_{11}+x_{12}+k_1=9,\\ x_{11}+x_{12}+k_2=10\end{cases}$$

$$7)\begin{cases}2x_{13}+x_1+\dots+x_{13}=11,\\ x_{13}+x_1+\dots+x_{13}+k_1-k_2=16.\end{cases}$$

Сложив вторые уравнения систем 1—6, найдем значение выражения:

$$x_1+\dots+x_{12}=31+11+9+9+27+10=97.$$

Из первого уравнения системы 7 имеем:

$$3x_{13}+x_1+\dots+x_{12}=11.$$

Откуда $3x_{13}=10$ и $x_{13}=14=$ "Н". Из второго уравнения системы 7 получим $k_1-k_2=19$. Зная k_1-k_2, легко найти буквы с нечетными номерами. Действительно, вычтя из первого уравнения системы (1) второе уравнение, найдем $x_1-(k_1-k_2)=21$ и отсюда $x_1=8=$ "З". Аналогично, из систем (2)—(6) получим:

$$x_3=\text{"Н"},\qquad x_5=\text{"П"},\qquad x_7=\text{"И"},\qquad x_9=\text{"Е"},\qquad x_{11}=\text{"Л"}.$$

Таким образом, буквы, стоящие в исходном сообщении на нечетных местах, известны:

$$\text{З}x_2\text{Н}x_4\text{П}x_6\text{И}x_8\text{Е}x_{10}\text{Л}x_{12}\text{Н}.$$

Далее, из вторых уравнений каждой системы 1-6:

$$x_2=23+k_2, x_4=-3-k_2, x_6=-7+k_2, x_8=-k_2, x_{10}=21+k_2,$$

$$x_{12} = -2 - k_2.$$

Значит, для определения остальных букв надо найти k_2. Сделаем это перебором. После первой буквы *З* должна, очевидно, идти гласная (*Ю, Я* маловероятны). Скорее всего x_2 это *А, Е, И,О,* или *У*. Пусть $x_2 =$ "А", тогда $k_2 = 10$ и $x_4 = 19 =$ "Т", что приводит к нечитаемому тексту. Перебирая остальные варианты, находим единственный верный вариант при $k_2 = 24$: $x_2 =$ "О", $x_4 =$ "Д" и т.д. В итоге имеем читаемый исходный текст:

ЗОНДПРИЗЕМЛЕН

Ответ: ЗОНД ПРИЗЕМЛЕН.